تمرين9: نقول عن تطبيق f معرف من مجموعة غير خالية A في نفسها إنه عديم القوة إذا تحقق الشرط:

$$f \circ f = Id_A$$

و هو ما يعني تماما أن التطبيق f تقابل وأن تطبيقه العكسي f^{-1} يحقق $f^{-1} = f$.

لنعتبر التطبيقين f و g التاليين:

$$\begin{array}{l} f : IR \longrightarrow IR \\ \quad x \mapsto ax+b \end{array} \qquad (\ a,b \in IR\ )$$

$$\begin{array}{l} g : A \longrightarrow A \\ \quad x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d} \end{array} \qquad A = IR - \left\{ \frac{a}{c}, -\frac{d}{c} \right\} \text{ و } a,b,d \in IR, c \in IR^*$$

1. عين قيم العددين الحقيقيين a,b حتى يكون التطبيق f عديم القوة.
2. عين قيم الأعداد الحقيقية a,b,d,c التي من أجلها يكون التطبيق g عديم القوة.

الحل: 1. بالنسبة للتطبيق f لدينا:

$$\forall x \in IR : (f \circ f)(x) = f(ax+b) = a(ax+b)+b = a^2x+ab+b$$

إذن، يكون التطبيق f عديم القوة إذا و فقط إذا تحققت المساواة: $\forall x \in IR : (f \circ f)(x) = Id_{IR}(x)$ ،

وهو ما يعني أن: $\forall x \in IR : a^2x+ab+b = x$.

بأخذ قيم خاصة $x=0$ ثم $x=1$ ينتج:

$$\begin{cases} a^2 = 1 \\ ab+b = 0 \end{cases}$$

أي إما: $a = \pm 1,\ b = 0$ أو $a = -1$ و $b \in IR - \{0\}$ (كيفي).

أما بالنسبة للتطبيق g فلدينا:

$$\forall x \in A : (g \circ g)(x) = g\left(\frac{a.x+b}{c.x+d}\right) = \frac{a\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)+b}{c\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)+d} = \frac{\dfrac{a^2x+ab+cbx+db}{cx+d}}{\dfrac{cax+cb+cdx+d^2}{cx+d}}$$

$$\forall x \in A : (g \circ g)(x) = \frac{a^2x+ab+cbx+db}{cax+cb+cdx+d^2} = \frac{a(ax+b)+b(cx+d)}{c(ax+b)+d(cx+d)}$$

إذن، يكون التطبيق g عديم القوة إذا و فقط إذا تحققت المساواة: $\forall x \in A : (g \circ g)(x) = Id_A(x)$ ،

و هو ما يعني أن: $\forall x \in A : \dfrac{a(ax+b)+b(cx+d)}{c(ax+b)+d(cx+d)} = x$ ،

أي أن:
$$\begin{cases} a^2 = d^2 \\ c.(a+d) = 0 \\ b.(a+d) = 0 \end{cases}$$

إذن لكون $c \neq 0$ ، تنتج لدينا حالتان:

إما: $d = -a \neq 0$ ، b كيفي من IR و c, a كيفيان من IR^* ،

أو أن: $d = a = 0$ ، b كيفي من IR و c كيفي من IR^* .

تمرين10: ليكن f, g تطبيقين و لتكن A, B, C ثلاث مجموعات غير خالية بحيث: $f : A \to B,\ \ g : B \to C$.

أثبت صحة القضيتين التاليتين:

- إذا كان التطبيق $g \circ f$ متباينا فإن التطبيق f متباين.
- إذا كان التطبيق $g \circ f$ غامرًا فإن التطبيق g غامر.

الحل: متروك للدارس.

التمرين11: لتكن A, B مجموعتين غير خاليتين و ليكن f تطبيقا بحيث: $f : A \to B$.

نفرض أن X_1, X_2 جزءان من المجموعة A .

أثبت صحة القضايا التالية:

1. $X_1 \subset X_2 \Rightarrow f(X_1) \subset f(X_2)$.
2. $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$.
3. $f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2)$.
4. $X_1 \subset f^{-1}\big(f(X_1)\big)$.
5. أثبت أنه إذا كان f متباينًا فإن: $f\big(X_1 \cap X_2\big) = f\big(X_1\big) \cap f\big(X_2\big)$.

الحل:

1. القضية الأولى بديهية لكون: $f(X_1) = \{f(x) :\ x \in X_1\}$ و $f(X_2) = \{f(x') : x' \in X_2\}$.
2. هذه القضية صحيحة دومًا لصحة التكافؤات التالية:

$$\begin{aligned} y \in f(X_1 \cup X_2) &\Leftrightarrow \left(y = f(x) : x \in (X_1 \cup X_2)\right) \\ &\Leftrightarrow \left(y = f(x) : x \in X_1\right) \vee \left(y = f(x) : x \in X_2\right) \\ &\Leftrightarrow \left(y \in f(X_1)\right) \vee \left(y \in f(X_2)\right) \\ &\Leftrightarrow \left(y \in f(X_1) \cup f(X_2)\right) \end{aligned}$$

3. هذه القضية محققة دومًا لصحة الاستلزامات التالية:

$$\begin{aligned} y \in f(X_1 \cap X_2) &\Rightarrow \left(y = f(x) : x \in (X_1 \cap X_2)\right) \\ &\Rightarrow \left(y = f(x) : x \in X_1\right) \wedge \left(y = f(x) : x \in X_2\right) \\ &\Rightarrow \left(y \in f(X_1)\right) \wedge \left(y \in f(X_2)\right) \\ &\Rightarrow \left(y \in f(X_1) \cap f(X_2)\right) \end{aligned}$$

4. القضية الأخيرة بديهية لكون:

$$\begin{aligned} x \in X_1 &\Rightarrow f(x) \in f(X_1) \\ &\Rightarrow x \in f^{-1}\left(f(X_1)\right) \end{aligned}$$

5. لإثبات هذه المساواة، يكفي أن نثبت الاحتواء: $f(X_1) \cap f(X_2) \subset f(X_1 \cap X_2)$ ، و هذا بفرض أن التطبيق f متباين، (الاحتواء: $f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2)$ محقق من 3.) ،

لدينا:

$$\begin{aligned} y \in f(X_1) \cap f(X_2) &\Rightarrow y \in f(X_1) \wedge y \in f(X_2) \\ &\Rightarrow \left(y = f(x) : x \in X_1\right) \wedge \left(y = f(x') : x' \in X_2\right) \\ &\Rightarrow \left(y = f(x) = f(x') : x \in X_1 \wedge x' \in X_2\right) \end{aligned}$$

ولكن القضية الأخيرة تستلزم أن: $x = x' \in X_1 \cap X_2$ ، لأن التطبيق f متباين فرضًا.

إذن: $y = f(x) \in f(X_1 \cap X_2)$ ، و منه: $f(X_1) \cap f(X_2) \subset f(X_1 \cap X_2)$ ،

و منه المساواة $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$ محققة.

تمرين12: لتكن A, B مجموعتين غير خاليتين و f تطبيقا بحيث $f : A \to B$.

نفرض أن Y_1, Y_2 جزءان من المجموعة B .

أثبت صحة القضايا التالية:

1. $Y_1 \subset Y_2 \Rightarrow f^{-1}(Y_1) \subset f^{-1}(Y_2)$.
2. $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$.
3. $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$.
4. $f\left(f^{-1}(Y_1)\right) \subset Y_1$.
5. أثبت أنه إذا كان f غامرًا فإن: $f\left(f^{-1}(Y_1)\right) = Y_1$.

6. $f^{-1}(B-Y_1)=A-f^{-1}(Y_1)$.
7. $f^{-1}(B)=A$.

الحل:

1. القضية الأولى بديهية لكون: $f^{-1}(Y_1)=\{x\in E:\ f(x)\in Y_1\}$ و $f^{-1}(Y_2)=\{x'\in E: f(x')\in Y_2\}$.

2. هذه القضية صحيحة دومًا لصحة التكافؤات التالية:

من تعريف الصورة العكسية بتطبيق:

$$\begin{aligned} x\in f^{-1}(Y_1\cup Y_2) &\Leftrightarrow f(x)\in(Y_1\cup Y_2)\\ &\Leftrightarrow (f(x)\in Y_1)\vee(f(x)\in Y_2)\\ &\Leftrightarrow (x\in f^{-1}(Y_1))\vee(x\in f^{-1}(Y_2))\\ &\Leftrightarrow (x\in f^{-1}(Y_1)\cup f^{-1}(Y_2)) \end{aligned}$$

3. هذه القضية محققة دومًا لصحة التكافؤات التالية:

$$\begin{aligned} x\in f^{-1}(Y_1\cap Y_2) &\Leftrightarrow f(x)\in(Y_1\cap Y_2)\\ &\Leftrightarrow (f(x)\in Y_1)\wedge(f(x)\in Y_2)\\ &\Leftrightarrow (x\in f^{-1}(Y_1))\wedge(x\in f^{-1}(Y_2))\\ &\Leftrightarrow (x\in f^{-1}(Y_1)\cap f^{-1}(Y_2)) \end{aligned}$$

4. القضية الأخيرة بديهية لكون:

$$\begin{aligned} y\in f(f^{-1}(Y_1)) &\Rightarrow y=f(x),\ x\in f^{-1}(Y_1)\\ &\Rightarrow y=f(x),\ f(x)\in Y_1\\ &\Rightarrow y\in Y_1 \end{aligned}$$

5. لإثبات هذه المساواة، يكفي أن نثبت الاحتواء: $Y_1\subset f(f^{-1}(Y_1))$، و هذا بفرض أن التطبيق f غامر، (الاحتواء: $f(f^{-1}(Y_1))\subset Y_1$ محقق من 4.)،

لدينا:

لكون التطبيق غامرًا $y\in Y_1\Rightarrow y\in B\Rightarrow \exists x\in A:\ y=f(x)$

و لكن $f(x)=y\in Y_1$، ومنه $x\in f^{-1}(Y_1)$، إذن $y=f(x):\ x\in f^{-1}(Y_1)$،

أي أن $y\in f(f^{-1}(Y_1))$.

و منه أثبتنا المساواة: $f(f^{-1}(Y_1))=Y_1$.

6. هذه القضية محققة نظرًا لتحقق التكافؤات التالية: ليكن $x\in A$، $(f(x)\in B)$

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B-Y_1) &\Leftrightarrow f(x) \in (B-Y_1) \\ &\Leftrightarrow (f(x) \in B) \wedge (f(x) \notin Y_1) \\ &\Leftrightarrow f(x) \notin Y_1 \\ &\Leftrightarrow x \notin f^{-1}(Y_1) \\ &\Leftrightarrow x \in (A - f^{-1}(Y_1)) \end{aligned}$$

7. بوضع $Y_1 = \phi \subset B$ في القضية السابقة (6.) التي تم إثباتها، فإنه ينتج مباشرة أن:
$f^{-1}(B) = f^{-1}(B-\phi) = A - f^{-1}(\phi) = A - \phi = A$.

تمرين13: لتكن A, B مجموعتين غير خاليتين و ليكن f تطبيقا بحيث: $f : A \to B$.
أثبت صحة التكافؤات التالية:

1. f متباين $\Leftrightarrow$ $\forall X_1, X_2 \in P(A):\ f(X_1 - X_2) = f(X_1) - f(X_2)$
$\Leftrightarrow$ $\forall X_1, X_2 \in P(A):\ f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$
$\Leftrightarrow$ $\forall X \in P(A):\ f^{-1}(f(X)) = X$.

2. f غامر $\Leftrightarrow$ $\forall Y \in P(B):\ f(f^{-1}(Y)) = Y$
$\Leftrightarrow$ $\forall y \in B:\ f(f^{-1}\{y\}) = \{y\}$
$\Leftrightarrow$ $\forall Y \in P(B):\ (f^{-1}(Y) = \phi \Rightarrow Y = \phi)$.

الحل:

1. لنثبت مثلا التكافؤ الثالث: (f متباين $\Leftrightarrow$ $\forall X \in P(A):\ f^{-1}(f(X)) = X$).
الاستلزام الأول: f متباين $\Leftarrow$ $\forall X \in P(A):\ f^{-1}(f(X)) = X$:
(في حالة: $X = \phi$ ، فإن المساواة بديهية).
ليكن X جزءا غير خال من المجموعة A ، عندئذ $X \subset f^{-1}(f(X))$ (من 4. من التمرين11).
لنفرض الآن أن التطبيق f متباين، يبقى فقط أن نبين الاحتواء: $f^{-1}(f(X)) \subset X$.
لدينا تعريفا: $f^{-1}(f(X)) = \{x \in A:\ f(x) \in f(X)\}$ ،
إذن: $x \in f^{-1}(f(X)) \Rightarrow f(x) \in f(X),\ x \in A$
و منه: $\exists x' \in X:\ f(x) = f(x')$
و لكون التطبيق f متباينًا، ينتج أن: $x = x' \in X$
أي أن: $x \in X$ ، ومنه أثبتنا الاحتواء: $f^{-1}(f(X)) \subset X$ ، إذن: $f^{-1}(f(X)) = X$.

الاستلزام الثاني: f متباين $\Rightarrow$ $\forall X \in P(A):\ f^{-1}(f(X)) = X$.
لنفرض أن القضية $\forall X \in P(A):\ f^{-1}(f(X)) = X$ محققة.
و ليكن x, x' عنصرين من A بحيث $f(x) = f(x')$. إذن $f(\{x\}) = f(\{x'\})$ ، وينتج إذن أن

$f^{-1}(f(\{x\})) = f^{-1}(f(\{x'\}))$.

بأخذ $X = \{x\},\ X' = \{x'\}$ وتطبيق الفرض ينتج:

$f^{-1}(f(\{x'\})) = \{x'\}$ و $f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$

وهو ما يعني بعد التعويض في المساواة السابقة أن: $\{x\} = \{x'\}$ ، أي أن $x = x'$ ، ومنه التطبيق f متباين.

2. نثبت مثلا التكافؤ الثاني: (f غامر $\Leftrightarrow$ $\forall y \in B:\ f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$).

الاستلزام الأول: f غامر $\Rightarrow$ $\forall y \in B:\ f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$:

لنفرض أن القضية $\forall y \in B:\ f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$ محققة.

و ليكن y عنصرًا كيفيًا من المجموعة B ، عندئذ (حسب الفرض) فإن: $y \in f(f^{-1}(\{y\}))$ ،

أي أن $\exists x \in f^{-1}(\{y\}):\ y = f(x)$.

و منه: $\exists x \in A:\ y = f(x)$ ، و هو ما يعني أن التطبيق f غامر.

الاستلزام الثاني: (f غامر $\Leftarrow$ $\forall y \in B:\ f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$).

لنفرض الآن أن التطبيق f غامر.

وليكن $y \in B$. إذن $\exists x \in A:\ y = f(x)$. وبالتالي $x \in f^{-1}(\{y\})$. وبما أن f تطبيق فإن $y = f(x) \in f(f^{-1}(\{y\}))$. وهو ما يعني أن $\{y\} \subset f(f^{-1}(\{y\}))$.

أما فيما يخص الاحتواء العكسي $f(f^{-1}(\{y\})) \subset \{y\}$.

ليكن $z \in f(f^{-1}(\{y\}))$ ، يوجد إذن $x \in f^{-1}(\{y\})$ بحيث $z = f(x)$ ؛ وبالتالي $z = f(x) \in \{y\}$ ومنه $f(f^{-1}(\{y\})) \subset \{y\}$. من الاحتواءين تنتج المساواة المطلوبة.

تمرين14: لتكن A_1, A_2, B_1, B_2 أربع مجموعات غير خالية.

و ليكن التقابلين: $f_1 : A_1 \to B_1$ و $f_2 : A_2 \to B_2$ بحيث: $A_1 \cap A_2 = \phi$ و $B_1 \cap B_2 = \phi$.

عين عندئذ، تقابلا $f : A_1 \cup A_2 \to B_1 \cup B_2$.

الحل: لنعرف f كما يلي:

$$f : A_1 \cup A_2 \to B_1 \cup B_2$$
$$x \mapsto \begin{cases} f_1(x),\ x \in A_1 \\ f_2(x),\ x \in A_2 \end{cases}$$

و لنثبت أن f : معرف جيدًا، تطبيق، متباين وغامر.

- f معرف جيدًا: (واضح من تعريف f_1 و f_2 ، و لكون $A_1 \cap A_2 = \phi$).
- f تطبيق لأنه: من أجل كل x, x' من $A_1 \cup A_2$ ، ولكون $A_1 \cap A_2 = \phi$ ، فإنه ينتج لدينا:

$$x = x' \Rightarrow \begin{cases} f_1(x) = f_1(x'),\ x = x' \in A_1 \\ \qquad \vee \\ f_2(x) = f_2(x'),\ x = x' \in A_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = f(x'),\ x = x' \in A_1 \\ \qquad \vee \\ f(x) = f(x'),\ x = x' \in A_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x')$$

و هو ما يعني أن f تطبيق.

– f متباين لأنه: من أجل كل x, x' من $A_1 \cup A_2$ ، ولكون $B_1 \cap B_2 = \phi$ ، فإنه ينتج لدينا:

$$f(x) = f(x') \Rightarrow \begin{cases} f(x) = f(x') \in B_1,\ x, x' \in A_1 \\ \qquad \vee \\ f(x) = f(x') \in B_2,\ x, x' \in A_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_1(x) = f_1(x'),\ x, x' \in A_1 \\ \qquad \vee \\ f_2(x) = f_2(x'),\ x, x' \in A_2 \end{cases}$$

وبما أن التطبيقين f_1 و f_2 متباينان فإن: $x = x'$. وهو ما يعني أن f متباين.

– f غامر لأنه: من أجل كل y من $B_1 \cup B_2$ ، و لكون $B_1 \cap B_2 = \phi$ ، فإنه ينتج لدينا:

$$y \in B_1 \cup B_2 \Rightarrow \begin{cases} y \in B_1 \\ \quad \vee \\ y \in B_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists x' \in A_1,\quad y = f_1(x') = f(x') \\ \qquad \vee \\ \exists x'' \in A_2,\quad y = f_2(x'') = f(x'') \end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists x \in A_1 \cup A_2 :\ y = f(x),\ \ (x = x' \vee x = x'')$$

وهو ما يعني أن f غامر.

و هكذا إذن، أنشأنا تقابلا f : $f : A_1 \cup A_2 \longrightarrow B_1 \cup B_2$.